

## Tentamen Talen en Automaten, 6 juli 2006

Tijdsduur 3 uur. Gesloten boek tentamen.

Voorzie alle in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen.

Formuleer kort en zakelijk, scherp en zorgvuldig, met steekhoudende argumenten voor de correctheid van je beweringen. Werk netjes. Schrijf duidelijk leesbaar.

**Opgave 1** (16 %). Beschouw het alfabet  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$  en de taal  $L_1$  over  $\Sigma$  die bestaat uit de strings  $a^i b^k c^{i+k}$  voor getallen  $i, k \in \mathbb{N}$ .

- Laat zien dat de taal  $L_1$  contextvrij is en geef er een contextvrije grammatica voor.
- Formuleer het Pomplemma voor *reguliere* talen.
- Bewijs dat de taal  $L_1$  niet regulier is.

**Opgave 2** (12 %). Geef een algoritme om bij een gegeven reguliere expressie  $E$  over  $\Sigma$  te beslissen of de taal van  $E$  de lege string  $\varepsilon$  bevat.

**Opgave 3** (16 %). Beschouw de taal  $L_3$  die wordt voortgebracht door de grammatica  $G$  volgens

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AA \mid C \mid cSd \\ A &\rightarrow da \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow aB \mid BbCc \mid cDd \\ C &\rightarrow B \mid aC \mid S . \end{aligned}$$

Leid hieruit een grammatica  $G'$  af die geen overbodige (*useless*) symbolen bevat en ook geen  $\varepsilon$ -producties bevat en waarvoor geldt dat  $L(G') = L_3 - \{\varepsilon\}$ .

**Opgave 4** (14 %). Gegeven zijn twee contextvrije talen  $L_1$  en  $L_2$ . Bewijs dat hun vereniging  $L_1 \cup L_2$  ook contextvrij is.

**Opgave 5** (10 %).

- Geef definities voor de begrippen *recursief opsombaar* en *beslisbaar*.
  - Is elke recursief opsombare taal ook beslisbaar?
  - Is elke beslisbare taal ook recursief opsombaar?
- (NB. Je mag *beslisbaar* beschouwen als hetzelfde als *recursief*, maar het is iets anders dan *recursief opsombaar*.)  
Licht je antwoorden bij (b) en (c) kort toe; er worden geen bewijzen gevraagd.

**Opgave 6** (10 %). Gegeven zijn de talen  $L_1$  en  $L_2$ , en deterministische eenbands Turing machines  $M_1$  en  $M_2$  waarvoor geldt  $L(M_1) = L_1$  en  $L(M_2) = L_2$ . We zijn geïnteresseerd in de vereniging  $L_1 \cup L_2$ .

- Beschrijf een deterministische (mogelijk meerbands) Turing machine  $M$  die voldoet aan  $L(M) = L_1 \cup L_2$ .
- De constructie van onderdeel (a) bewijst een bewering van de vorm: "Als de talen  $L_1$  en  $L_2$  ... zijn, dan is  $L_1 \cup L_2$  ook ...". Welke bewering is dit?

**Opgave 7** (10 %). Turing machines kunnen gecodeerd worden in de taal  $Ctm$  die bepaald wordt door de reguliere expressie  $((\mathbf{0}^+ \mathbf{1})^5 \mathbf{1})^+ \mathbf{1}$ . Beschrijf een  $\varepsilon$ -NFA die precies deze taal accepteert en minder dan 18 toestanden bevat.

**Opgave 8** (12 %). Gegeven zijn twee beslisbare talen  $L_1$  en  $L_2$ . Concatenatie geeft de taal  $L = L_1 L_2$ . Laat zien dat  $L$  ook beslisbaar is.